Міністерство освіти і науки України Жовтоводський промисловий коледж Дніпровського національного університету ім. О. Гончара Циклова комісія фізико-математичних дисциплін

## Обробка інформації

## за допомогою математичного пакета

## MathCAD

#### Навчально-методичний посібник

для студентів технічних спеціальностей

Підготувала: викладач фізико-математичних дисциплін Сєдухіна Т.М.

Затверджено на засіданні циклової комісії фізико-математичних дисциплін (Протокол № \_\_\_ від \_\_\_\_\_) Голова комісії Данилейченко Н.М.

м. Жовті Води 2020

## **3MICT**

§ 1. Основні поняття, особливості організації інтерфейсу MathCAD 3
§ 2. Головне меню MathCAD, панелі інструментів Найпростіші обчислення та операції в MathCAD (Для самостійного опрацювання) б
§ 3. Типи даних. Оператори і математичні вирази. Проведення простих розрахунків у MathCad
§ 4. Стандартні функції Mathcad (Для самостійного опрацювання) 17
§5. Спеціальні обчислення в системі MathCad 20
§ 6. Пошук екстремумів функцій (Для самостійного опрацювання) 31
§ 7. Матричні та векторні операції в MathCAD 34
§ 8. Розв'язок математичних рівнянь у системі MathCAD 38
§ 9. Розв'язання систем рівнянь у системі MathCAD 43
§ 10. Створення графіків у програмі Mathcad 48
Література 56

## § 1. Основні поняття, особливості організації інтерфейсу MathCAD

#### План

1. Загальна характеристика програми MathCAD.

- 2. Завдання, які можна виконати за допомогою MathCAD.
- 3. Можливості MathCAD.

**Mathcad** — система комп'ютерної алгебри з класу систем автоматизованого проектування, орієнтована на підготовку інтерактивних документів з обчисленнями і візуальним супроводженням, відрізняється легкістю використання і застосування для колективної роботи.

Mathcad був задуманий і спочатку написаний Алленом Раздовим з Массачусетського технологічного інституту (МІТ), співзасновником компанії Mathsoft Inc., яка з 2006 року є частиною корпорації РТС (Parametric Technology Corporation).

Мathcad є математичним редактором, що дозволяє проводити різні наукові й інженерні розрахунки, починаючи від елементарної арифметики й закінчуючи складними реалізаціями числових методів. Користувачі Mathcad – це студенти, учені, інженери, різні технічні фахівці. Завдяки простоті застосування, наочності математичних дій, великій бібліотеці вбудованих функцій і числових методів, можливості символьних обчислень, а також чудовому апарату подання результатів (графіки самих різних типів, потужних засобів підготовки друкованих документів й Webcторінок), Mathcad став найбільш популярним математичним додатком.

Mathcad, на відміну від більшості інших сучасних математичних додатків, побудований відповідно до принципу WYSIWYG (What You See Is What You Get – що Ви бачите, те й одержите). Тому він дуже простий у використанні, зокрема, через відсутність необхідності спочатку писати програму, що реалізує ті або інші математичні розрахунки, а потім запускати її на виконання. Замість цього досить просто вводити математичні вирази за допомогою вбудованого редактора формул, причому у вигляді, максимально наближеному до загальноприйнятого, і відразу одержувати результат.

Відповідно до проблем реального життя, інженерам та науковцям доводиться вирішувати одну або декілька з таких задач:

– введення в комп'ютер різних математичних виразів (для подальших розрахунків або створення документів, презентацій, Web-сторінок);

виконання математичних розрахунків;

- підготовка графіків за результатами розрахунків;

– введення початкових даних і виведення результатів у текстові файли або файли з базами даних в інших форматах;

- підготовка звітів роботи у вигляді друкованих документів;

- підготовка Web-сторінок і публікація результатів в Інтернеті;

– одержання різної довідкової інформації з області математики.

Mathcad з успіхом справляється з такими завданнями. В цій програмі:

– математичні вирази й текст вводяться за допомогою формульного редактора Mathcad, що за можливостями і простотою використання не поступається, наприклад, редактору формул, який вбудований в Microsoft Word;

– математичні розрахунки виконуються негайно, відповідно до введених формул;

– графіки різних типів (на вибір користувача) з багатими можливостями форматування вставляються безпосередньо в документи;

– можливе введення й виведення даних у файли різних форматів;

– документи можуть бути роздруковані безпосередньо в Mathcad у тому вигляді, що користувач бачить на екрані комп'ютера, або збережені у форматі RTF для наступного редагування в потужніших текстових редакторах (наприклад, Microsoft Word, Staroffise);

– можливо повноцінне збереження документів Mathcad у форматі Web-сторінок (генерація допоміжних графічних файлів відбувається автоматично);

 – є опція об'єднання документів, що розробляються вами, в електронні книги, які, з одного боку, дозволяють у зручному вигляді зберігати математичну інформацію, а з іншого боку – є повноцінними Mathcad-програмами, здатними здійснювати розрахунки;

– символьні обчислення дозволяють здійснювати аналітичні перетворення, а також миттєво одержувати різноманітну довідкову математичну інформацію;

– можливість створення шаблонів стандартних розрахунків для розв'язання типових задач, у яких потрібні результати можна отримати шляхом введення нових вхідних даних.

4

Серед можливостей Mathcad  $\epsilon$ :

• Розв'язання диференційних рівнянь, в тому числі і чисельними методами.

• Побудова двомірних і тривимірних графіків (в різних системах координат, контурні, векторні тощо).

• Використання грецького алфавіту (верхній і нижній регістр) як в тексті, так і у рівняннях.

- Символьні обчислення.
- Операції з векторами і матрицями.
- Символьне розв'язання систем рівнянь.
- Згладжування кривих.
- Виконання підпрограм.
- Знаходження коренів функцій і поліномів.
- Статистичні функції і розподіли ймовірностей.
- Пошук власних значень і власних векторів.
- Обчислення з розмірностями.

## Редагування документів

Ввести математичний вираз можна в будь-якому порожньому місці документа MathCAD. Для цього треба помістити курсор введення в бажане місце документа, клацнувши в ньому мишею, і просто починати вводити формулу за допомогою клавіатури. При цьому в документі створюється *математична область*, що призначена для збереження формул, які інтерпретуються процесором MathCAD.

## Контрольні питання.

- 1. Що являє собою програма MathCAD?
- 2. Які задачі, відповідно до проблем реального життя, доводиться вирішувати, інженерам та науковцям?
- 3. Які загальні можливості має програма MathCAD?
- 4. Які можливості надає **MathCAD** користувачу при роботі з математичними виразами?

## § 2. Головне меню MathCAD, панелі інструментів. Найпростіші обчислення та операції в MathCAD (Для самостійного опрацювання)

### План

- 1. Структура вікна програми MathCAD.
- 2. Характеристика елементів головного меню програми.
- 3. Математична панель інструментів. Інші панелі.
- 4. Рядок повідомлень.
- 5. Виконання простих розрахунків.

Після того, як Mathcad установлений на комп'ютері й запущений на виконання, з'являється основне вікно програми, показане на рисунку 1. Воно має ту ж структуру, що й більшість додатків Windows. Зверху вниз розташовуються заголовок вікна, рядок меню, панелі інструментів (стандартна й форматування) і робочий аркуш або робоча область документа (worksheet). Новий документ створюється автоматично під час запуску Mathcad. У самій нижній частині вікна знаходиться рядок стану. Не забуваючи про подібність редактора Mathcad зі звичайними текстовими редакторами, ви інтуїтивно зрозумієте призначення більшості кнопок на панелях інструментів.

🔐 Matho	ad Профессиональная версия - [Untitled	:1]
Файл	Правка Просмотр Вставка Форматирование	Математика Символика Окно Помощь – 🗗 🗙
0 🗳	<b>₽   ∯   &amp;   ♥     X     10   @       10            </b>	f 🕅 🔁 = 🐁 🖗 🎝 100% 🗾 💭 🢡
Normal	Arial	▼ 10 Вставить юнит]
	Вибір Підказка, що шрифту	о з'являється Математична панель ی с∯ <≦ ג= וא כ≦ מו מו
+	Загальна частина робочого вікна Курсор	Межі листа Смуги прокручування
<		
Показывае	т список юнитов для вставки	Авто NUM Page 1

Рис. 1 – Головне вікно системи MathCad

Головне меню системи надає можливості доступу до математичних, графічних, символьних команд і до команд редагування та управління робочими аркушами.

Призначення команд пунктів Файл, Правка, Вид аналогічне, що і в інших додатках Windows.

У пункті Додати використовуються команди, що дозволяють додавати у документ стандартні функції, графіки, одиниці вимірювання, картинки, таблиці, файли та інші об'єкти.

Команди пункту **Формат** відповідають за зовнішній вигляд формул, графіків, результатів обчислень. Тут можна використати команду застосування і створення стилів. Команда **Формат результата** дозволяє вказати для результату формат числа (загальний, десятковий, науковий), стиль відтворення, формат одиниць вимірювання, точність.

У пункті Інструменти знаходяться команди Перевірка орфографії, Анімація, Захист робочого листа, Обчислити, Налагодити, Оптимізувати, Параметри робочого листа, Властивості (викликає вікно налаштувань Mathcad).

Серед команд пункту Символіка є такі: Обчислити, Змінна(Вирішити, замінити, диферінцювати, інтегрувати), Матриця (транспортувати, обернути, визначник), Перетворення (Фур'є, Лаплас).

Пункт **Вікно** дозволяє, якщо відкрито декілька документів, розташувати їх каскадом, горизонтальною чи вертикальною мозаїкою.

#### Математична панель

Математика [:::] x= [%

Рис. 2 – Математична панель.

Математична панель (рисунок 2) надає можливість швидкого введення математичних операторів. Якщо утримувати деякий час покажчик миші на одній із кнопок вказаної панелі, то з'являється коротка підказка про призначення цієї кнопки:

- Арифметична панель(Калькулятор),
- Панель відношень та бульових функцій,
- Панель графіків,
- Панель векторів та матриць,
- Панель математичного аналізу,
- Панель програмування,

- Панель грецьких літер,
- Панель символьних операцій.

При натисканні вказаних кнопок одержуємо палітри для вибору конкретних операторів (рисунок 3). При натисканні на символ відповідного оператора він переноситься у робочий аркуш.



Рис.3 – Математична панель з відкритими палітрами для вибору конкретних операторів

Панель інструментів Стандартна надає можливість швидкого виконання багатьох загальних процедур таких, як відкриття нового або існуючого робочого аркушу, його збереження та друкування, редагування, перевірка правопису і т. і.

Панель форматування дозволяє вам вибирати шрифти для тексту та математичних виразів або стилів.

## Рядок повідомлень

Рядок повідомлень (або рядок стану) знизу головного вікна Mathcad'а надає підкази про стан системи, результати виконаної операції, нагадує про сполучення клавіш тощо. Тут також міститься повідомлення про стан обчислень у робочому аркуші — «Авто» — це означає, що Mathcad автоматично переобчислює всі вирази при зміні даних. Під час обчислень тут з'являється повідомлення «Чекайте», при цьому курсор приймає форму

лампочки, що горить. Нарешті, у рядку повідомлень міститься інформація про те, чи натиснуті клавіші «Caps Lock» та «Num Lock», а також номер сторінки вашого робочого аркуша.

Крім елементів керування, характерних для типового текстового редактора, Mathcad оснащений додатковими засобами для введення й редагування математичних символів, одним із яких є панель інструментів Math (математична) (див. рисунок 2). За допомогою цієї, а також ряду допоміжних вкладених панелей, зручно здійснювати введення рівнянь.

Для того, щоб виконати прості розрахунки за формулами, зробіть таке:

 визначте місце в документі, де повинні з'явитися вирази, клацнувши мишею у відповідній точці документа;

- введіть ліву частину виразу;

- введіть знак рівності <=>.

Для обчислення синуса якого-небудь числа досить ввести із клавіатури вирази типу sin(1/4)=. Після того, як буде натиснута клавіша зі знаком рівності, із правої сторони виразу, як за помахом чарівної палички, з'явиться результат (лістинг 1).

Лістинг 1. Розрахунок простого виразу

$$\sin\left(\frac{1}{4}\right) = 0.247$$

Подібним чином можна виконувати й більш складні й громіздкі обчислення, користуючись при цьому всім арсеналом спеціальних функцій, які вбудовані в Mathcad. Легше всього вводити функції з клавіатури, як у прикладі з обчисленням синуса, але, щоб уникнути можливих помилок у їхньому написанні, краще вибрати інший шлях. Щоб ввести вбудовану функцію у вирази:

- визначте місце у виразі, куди потрібно вставити функцію;

 натисніть кнопку з написом f(x) на стандартній панелі інструментів (на неї вказує курсор на рисунку 4);

 – у списку Function Category (категорія функції) діалогового вікна, що з'явилося, Insert Function (вставити функцію) виберіть категорію, до якої належить функція, – у нашому випадку це категорія Trigonometric (тригонометричні); – у списку Function Name (ім'я функції) виберіть ім'я вбудованої функції, під яким вона фігурує в Mathcad (sin). У випадку утруднення з вибором орієнтуйтеся на підказку, що з'являється при виборі функції в нижньому текстовому полі діалогового вікна Insert Function;

– натисніть кнопку ОК – функція з'явиться в документі;

заповніть відсутні аргументи введеної функції (у нашому випадку це 1/4).

Результатом буде введення виразу з лістингу 1, для одержання значення якого залишилося лише ввести знак рівності.

Звичайно, не всякий символ можна ввести із клавіатури. Наприклад, незрозуміло, як вставити в документ знак інтеграла або диференціювання. Для цього в Mathcad є спеціальні панелі інструментів, дуже схожі на засоби редактора формул Microsoft Word.



Рис. 4 – На стандартній панелі інструментів курсор вказує на кнопку f(x)

Математична панель містить дев'ять кнопок, натискання кожної з яких приводить, у свою чергу, до появи на екрані ще однієї панелі інструментів. За допомогою цих дев'яти додаткових панелей можна вставляти в документи Mathcad piзні об'єкти. На рисунку 5, як легко побачити, на панелі Математична у натиснутому стані перебувають дві перші зверху ліворуч кнопки (над лівою з них перебуває покажчик миші). Тому на екрані присутні ще дві панелі – Calculator (калькулятор) і Graph (графік). Легко догадатися, які об'єкти вставляються при натисканні кнопок на цих панелях.

Наприклад, можна ввести вирази з лістинга.1 винятково за допомогою панелі Calculator. Для цього потрібно спочатку натиснути кнопку sin (першу зверху). Результат даної дії показаний на рисунку 5(вирази в рамці). Тепер залишається лише набрати вираз 1/4 усередині дужок (у місцезаповнювачі, позначеному чорним прямокутником). Для цього натисніть послідовно кнопки 1, / і 4 на панелі Calculator і потім, на ній же, кнопку =, щоб одержати відповідь (зрозуміло, ту ж саму, що й у попередньому рядку документа).



Рис. 5 – Введення виразів з лістингу 1 за допомогою панелі Calculator.

Описані дії демонструють використання Mathcad як звичайного калькулятора з розширеним набором функцій. Для математика ж цікава, як мінімум, можливість задання змінних й операцій з функціями користувача. Немає нічого простішого – в Mathcad ці дії, як і більшість інших, реалізовані за принципом "як прийнято в математиці, так і вводиться". Присвоювання позначається символом ":=", щоб підкреслити його відмінність від операції обчислення.

Лістинг 2. Використання змінних у розрахунках

$$x \coloneqq 1.2 \qquad y \coloneqq 55 \qquad z \coloneqq 4$$
$$\frac{\left(x^{2} \cdot 250\right)}{\sqrt[5]{y}} \cdot \ln(z \cdot \pi) = 408.814$$

Лістинг 3. Визначення функції користувача й розрахунок її значення в точці х=1

$$a := 2$$
  
 $f(x) := x^{a} - \frac{2}{|x - 5|}$   
 $f(1) = 0.5$ 

В останньому лістингу визначається функція f (х).

#### Контрольні питання.

- 1. Описати структуру вікна програми MathCAD.
- 2. Перерахувати складові елементи інтерфейсу користувача Mathcad.
- 3. Охарактеризувати пункти головного меню програми Mathcad.
- 4. Для чого призначена математична панель?
- 5. Перелічити кнопки математичної панелі.
- 6. Для чого призначена панель інструментів Стандартна?
- 7. Для чого призначена панель інструментів Форматування?
- 8. Охарактеризувати рядок повідомлень.
- 9. Яким символом позначається присвоювання в програмі Mathcad?
- 10.Які дії потрібно виконати, щоб зробити прості розрахунки за формулами?
- 11.Якими способами можна ввести вбудовані функції у вираз в програмі MathCAD?

# § 3. Типи даних. Оператори і математичні вирази. Проведення простих розрахунків у MathCad

#### План

- 1. Іменована константа.
- 2. Іменовані змінні.
- 3. Ранжовані змінні.
- 4. Матриці та вектори.
- 5. Файлові дані.
- 6. Приклади простих розрахунків у MathCad

Усі математичні записи на робочому полі документа MathCad візуально знайомі кожній людині ще зі школи. При роботі математичного процесора кожна незаблокована математична формула в документі MathCad приймається до виконання.

Розрахунки в MathCad здійснюються над даними, що подані в типовій формі у відповідності з характером операторів та використовуваних функцій.

Система MathCad підтримує такі типи даних:

#### 1. Іменована константа

Число  $\pi$  – це числова іменована константа. Найбільш важливі константи мають власне позначення (наприклад е, % та  $\infty$ ).

#### 2. Іменовані змінні

Іменовані змінні діляться на звичайні та системні. Визначаючі їх імена називаються ідентифікаторами, які складаються з латинських чи грецьких літер. Звичайним змінним хоча б один раз повинні бути присвоєні числові значення, які під час роботи можуть змінюватися. Системні змінні одержують раніш визначені системою початкові значення.

#### 3. Ранжовані змінні

Ранжовані змінні є допоміжними та забезпечують діапазон значень в указаних межах при заданому кроці зміни. MathCad обчислює вирази з такою зміною по всіх її значеннях. Ітерації здійснюються без явного завдання циклу. Збереження всієї сукупності результатів досягається за рахунок індексації утворюючого масиву.

#### 4. Матриці та вектори

Матриці та вектори – це одномірні чи двомірні масиви даних. Перейти до них у межах багатьох задач вдається, якщо використовувати ранжовані змінні.

#### 5. Файлові дані

Дані можуть зберігатися окремо від документа в іншому файлі, що визначає суттєву різницю при роботі з ними. Файли корисні при збереженні великих об'ємів табличних даних.

Змінним надають значення за допомогою спеціального оператору присвоєння (:=). Ім'я змінної в шаблоні ( := )записується зліва. Оператор присвоєння передбачає передачу конкретного значення чи математичного виразу справа на ліво. Якщо в будь-якій формулі числових розрахунків не визначена та чи інша зміна, то MathCad висвітлить її червоним кольором.

## Проведення простих розрахунків у MathCad

**Приклад** 3.1. Необхідно визначити довжину кола L, якщо розрахункова формула має вид:  $L=2\pi R$ . У MathCad розрахунок матиме вигляд, зображений на рисунку 6.

З рисунку 6 видно, що обчислення здійснюється в три етапи. На першому етапі необхідно задати значення змінної радіуса кола R. На другому етапі необхідно ввести розрахункову формулу, де іменовану константу  $\pi$  вводимо завдяки панелі *Греческие* меню *Математика*. На останньому кроці необхідно набрати L та натиснути знак «=» і MathCad видасть відповідь.



Рис. 6 – Обчислення довжини кола

При введені пояснень українською мовою необхідно використовувати один із шрифтів, який розуміє кирилицю, наприклад, Fixedsys, інакше програма замість букв видасть незрозумілі ієрогліфи та значки.

Точність розрахунків можна встановити за допомогою меню *Форматирование*→*Результат*. На вкладці **Формат чисел** вибрати пункт **Десятичная** та в полі **Число десятичных знаков** виставити необхідну кількість знаків після крапки (рисунок. 7).

ормат результ Формат чисел	ата Отоб	ражение	Единицы измерен	ия Точность
<u>Формат</u> Общие Десятичная Научный Инженерный Дробный		<u>Ч</u> исло д Пока Пока форн Э <u>к</u> споне	есятичных знаков зывать нули после зывать экспоненте нате енциальный порог	2 🔹 запятой ы как Е±000 0 🔹
ОК	Оті	ена		Справка

Рис. 7 – Завдання потрібної кількості знаків після крапки

Приклад 3.2. Обчислити значення виразів:

1) 
$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$
,  $\frac{\sqrt[4]{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{3}}}$ ,  $3^{\sqrt{\sqrt{3}+5}}$ ,  $e^{\log(5+1/3)}$ ;  
 $a = 1$ ,  $b = 3.22$ ,  $p = \pi$   
2)  $c = \frac{a+b}{2}$ ,  $d = \frac{a-b}{2}$ ,  $g = \sin(\frac{\pi}{2})$ ,  $f = \frac{c^2 + d^2 + g^2}{\sqrt{3}}$ 

У програмі MathCAD розв'язок даного прикладу має вид, зображений на рисунках 8 та 9.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \qquad \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{3}}} = 0.845 \qquad 3^{\sqrt{\sqrt{3}+5}} = 17.296 \qquad e^{\log\left(5+\frac{1}{3}\right)} = 2.069$$

$$\frac{\text{Kankyngtop}}{\text{n! i } m_{-n}} \times_{n} |\times| \text{ in } e^{X} \times^{-1} \times^{Y} {}^{n}\Gamma \log \pi () \times^{2} \Gamma \text{ tan } 7 \text{ 8}$$

$$9 \ / \ \cos 4 \ 5 \ 6 \ \times \ \sin 1 \ 2 \ 3 \ + \ \coloneqq \ 0 \ - \ =$$

Рис. 8 – Розв'язок першої частини прикладу 3.2

Набір виразів здійснюємо за допомогою панелі інструментів *Калькулятор*.

```
1. Присвоєння значень змінним:

a = 1 b = 3.22 p = \pi

2. Проведення розрахунків:

c = \frac{a+b}{2} d = \frac{a-b}{2} g = sin\left(\frac{p}{2}\right)

3. Виведення результатів розрахунків:

c = 2.11 d = -1.11 g = 1

4. Проведення подальших розрахунків:

f = \frac{c^2 + d^2 + g^2}{\sqrt{5}}

5. Виведення результатів подальшихрозрахунків:

f = 3.859 +
```

Рис. 9 – Розв'язок другої частини прикладу 3.2

При введені значення змінних необхідно деяким змінним присвоювати результати, тобто в документі програми MathCAD вводити знак присвоєння, натискаючи комбінацію клавіш Shift+ «:» або вибравши знак присвоєння з однієї з панелей інструментів *Математика*, наприклад, на панелі Калькулятор вибрати знак «:=».

Приклад 3.3. Обчислити для значень x 1, 5 та 7 значення у для таких функцій:  $y_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}}$ ;  $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{22}}$ ;  $y_3 = \frac{\arctan(x)}{2}$ 

Розв'язок у MathCAD буде мати вигляд, зображений на рисунку 10.

Для завдання ряду значень необхідно скористатися панеллю векторів и матриць та задати вхідні дані у вигляді матриці, тоді результат обчислень теж буде подано у вигляді матриць. Такий підхід використовується, коли необхідно для однієї і тієї ж формули обчислити різні значення виразу у залежно від вхідних значень x.



Рис. 10 – Розв'язок прикладу 3.3

Для завдання функції arctan(x) необхідно на панелі інструментів Стандартная вибрати кнопку Вставить функцию чи скористатися пунктом меню Вставка Вставить функцию. Після чого з'явиться діалогове вікно, в якому потрібно в полі категорії вибрати категорію тригонометричні, а потім в полі ім'я функції вибрати потрібну функцію.

#### Контрольні питання

- 1. Які типи даних аідтримує система MathCad?
- 2. Наведіть приклад іменованої константи.
- 3. На які категорії діляться вменовані змінні?
- 4. Чим відрізняються звичайні і системні змінні?
- 5. Що являють собою ранжовані змінні?
- 6. Що таке матриці та вектори у системі MathCad?
- 7. За допомогою якого оператора змінним надають значення?

## § 4. Стандартні функції Mathcad (Для самостійного опрацювання)

## План.

- 1. Вбудовані функції.
- 2. Тригонометричні і гіперболічні функції.
- 3. Показникові і логарифмічні функції.
- 4. Функції сортування.
- 5. Функції з умовами порівняння
- 6. Функція if.
- 7. Автоматизоване введення функцій.

Система MathCAD вміщує великий набір вбудованих елементарних функцій. Функції задаються своїми іменами та значеннями аргументу, що записані у круглих дужках. Функції, як і змінні, і числа, можуть входити у склад математичних виразів. У відповідь на звернення до них, функції повертають обчислені значення. Нижче представлені деякі з цих функцій з аргументом z.

## Тригонометричні функції.

sin (z) -	синус	cos (z) -	косинус
tan (z) -	тангенс	sec (z) -	секанс
cot (z) -	котангенс	csc (z) -	косеканс

## Зворотні тригонометричні функції

asin (z) - арксинус acos(z) - арккосинус atan(z) - арктангенс

## Показникові і логарифмичні функції

exp (z) - експоненціальна функція

ln (z) - натуральний логарифм

log (z) - десятковий логарифм

## Функції сортування

Mathcad має три функції для сортування масивів і одну для обертання порядку їх елементів:

sort(v) – повертає елементи вектора v, відсортовані у порядку зростання.

сsort (**A**, *n*) – сортує рядки матриці **A** таким чином, щоб розташовує елементи у стовпчика *n* у порядку зростання. Результат має той же самий розмір, що і вхідна матриця **A**.

rsort (**A**, *n*) – сортує стовпці матриці таким чином, щоб розташувати елементи у рядку *n* у порядку зростання. Результат має той же самий розмір, що і матриця **A**.

reverse (**v**) – обертає порядок елементів вектора **v**. reverse (**A**) – Обертає порядок елементів рядків матриці **A**.

#### Функції з умовами порівняння.

ceil (x) - найменше ціле, більше чи рівне x

floor(x) – найбільше ціле, менше чи рівне x

mod(x,y) – остаток від ділення x на y зі знаком x

#### Функція *if*

Функція *if* призначена для створення умовних виразів:

*if* (умова, вираз \_1, вираз \_2)

Якщо в цій функції умова виконується, то буде обчислено вираз \_1, в протилежному випадку – вираз \_2.

Умова – це оператор для порівняння двох величин, який називається оператором відношення або логічним оператором. Нижче наводиться перелік логічних операторів и правила набора їх на клавіатурі:

		1
Оператор	Клавіші	Найменування операції
x>y	x>y	х більше у
x <y< td=""><td>x<y< td=""><td>х менше у</td></y<></td></y<>	x <y< td=""><td>х менше у</td></y<>	х менше у
x ≥y	x ctrl+0 y	х більше чи дорівнює у
x <u>≤</u> y	x ctrl+9 y	х менше чи дорівнює у
$\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$	x ctrl+3 y	х не дорівнює у
x = y	x ctrl += y	х дорівнює у

Таблиця 1.

Не потрібно плутати оператор порівняння (знак дорівнює) с схожим знаком вивода значень змінних. В системі MathCAD знак дорівнює як оператор відношення має більший розмір и більш жирне накреслення.

Вирази с логічними операторами повертають логічне значення, що відповідає виконанню чи невиконанню умови, заданої оператором. Якщо умовае виконана, повертається одиниця, якщо не виконана – нуль (0).

**Приклад 5.1.** Розрахувати миттєве значення току, отриманого в результаті однополуперіодного випрямленння синусоідального току i = 50 sin(314 t) в різні моменти часу.

$$t := \frac{\pi}{6}$$
  
i := if (t>0, 50\*sin(3.14\*t), 0)  
i=49.866

Для того, щоб обчислити значення випрямленого току в інші моменти часу, достатньо у самому першому виразі змінити значення *t i* задати режим обчислень.

Щоб уникнути можливих помилок в написанні імен функцій, можна вибрати шлях автоматизованого введення функцій.

#### Для автоматизованого вводу функції:

1. Натисніть кнопку з написом f(x) на стандартній панелі інструментів.

2. У списку **Категорія функції** діалогового вікна **Вставка функції**, що з'явилося виберіть категорію, до якої належить функція.

3. У списку **Ім'я функції** виберіть ім'я вбудованої функції, під яким вона фігурує в MathCAD.

#### Контрольні питання

- 1. Як задаються функції в програмі MathCAD ?
- 2. Наведіть приклади тригонометричних функцій.
- 3. Наведіть приклади логарифмічних функцій.
- 4. Як позначається показникові функція.
- 5. Яка функція виконує сортування вектора значень?.
- 6. Яка функція сортує рядки матриці?
- 7. Наведіть функції з умовами порівняння.
- 8. Яка функція призначена для створення умовних виразів?

- 9. Наведіть загальний вигляд функції іf.
- 10. Що таке умова?
- 11. Як набрати в програмі MathCAD вираз х ≥у?
- 12. Як набрати в програмі MathCAD вираз x = y?

## §5. Спеціальні обчислення в системі MathCad

## План

- 1. Обчислення похідних.
- 2. Табуляція функцій.
- 3. Обчислення суми ряду чисел.
- 4. Обчислення добутку ряду чисел.
- 5. Обчислення границь.
- 6. Обчислення інтегралів.

Спеціальні обчислення в системі MathCad включають такі операції:

- обчислення похідних;
- табуляція функцій;
- обчислення суми ряду чисел;
- обчислення добутку ряду чисел;
- обчислення границь;
- Обчислення інтегралів;
- розкладення функції в степеневий ряд.

## Обчислення похідних

Система MathCad дозволяє обчислювати похідні будь-якого порядку при необмеженій кількості символьних змінних. При цьому використовуються два різних способи.

*Перший спосіб* ґрунтується на символьних обчисленнях. Цей спосіб виконується за допомогою команд меню *Символика* – *Переменные* – *Дифференцировать*.

Технологія реалізації цього методу базується на виконанні таких кроків:

- введення виразу, похідну якого необхідно знайти;
- виділення за допомогою подвійного клацання мишки змінної диференціювання;

### - звертання до команд меню *Символика→Переменные →Дифференцировать*.

Після виконання команди **Дифференцировать** на екрані з'явиться значення похідної.

Розглянемо на прикладі можливості цього методу.

**Приклад 5.1.** Необхідно знайти похідну такої функції: y(x)

 $=\frac{x-1}{x+1}+\ln(2\cdot x)-x\cdot e^{-x}$ 

Розв'язок наведений на рисунку 11.

```
Диференціювання виразу:

\frac{(x-1)}{x+1} + \ln(2 \cdot x) - x \cdot \exp(-x)
Результат диференціювання:

\frac{1}{(x+1)} - \frac{(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \exp(-x) + x \cdot \exp(-x)
```

Рис. 11 – Результат диференціювання для прикладу 5.1

Основна перевага цього методу – простота.

Але він має і такі недоліки:

1. Для одержання n-ї похідної необхідно звертатися n раз до пункту меню Символика.

2. Вираз похідної досить складний, він не спрощується системою.

*Другий спосіб трунтується* на зверненні до маркерів введення похідної. При використанні цього способу на екрані виводиться відповідний шаблон введення, в чорні позиційні маркери вводяться вирази для функції, змінна диференціювання та порядок похідної. Для одержання розв'язку досить натиснути клавішу виводу розв'язку.

Технологія цього способу полягає в виконанні таких операцій:

- виклик на екран шаблону похідної;
- введення функції, змінної та порядку диференціювання;
- одержання результату.

Шаблон похідної можна викликати на екран за допомогою клавіатури або миші. Натиснувши комбінацію клавіш Shift+? чи Shift+Ctrl+?, одержимо на екрані шаблони відповідно першої та n-ї похідної. Того ж самого можна досягти, якщо клацнути мишею по відповідному шаблону на панелі інструментів Исчисление.

Введення функції здійснюється за допомогою клавіатури у відповідності з маркерами введення.

Перехід з одного позиційного маркеру в інший здійснюється натисненням клавіші Тав чи →, або лівої клавіші миші у відповідності з маркером введення.

Одержати результат можна шляхом натискання клавіш Shift+F9, також можна використовувати кнопку символьних обчислень панелі інструментів *Символьная*.

Розглянемо на прикладі можливість цього методу.

Приклад 5.2. Необхідно обчислити похідну функції:

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{a+b\cdot x}{a-b\cdot x} + \sin(2\cdot x)\cdot xod(2\cdot x)$$



Рис. 12 – Розв'язок для прикладу 5.2

3 рис. 12 видно, що розв'язок надто громіздкий. Спроби спростити його не привели до успіху.

На основі проведення аналізу можна зробити висновок, що система MathCAD дозволяє одержати похідну функції n-го порядку, але вираз похідної часто дуже складний.

#### Табуляція функцій

Табульованими є функції подані у вигляді таблиці. Табуляцію можна здійснити шляхом обчислення функції для всіх значень аргументів. Такий процес є дуже громіздким. Тому в багатьох математичних системах є функції, що дозволяють, по відомому вектору вихідних даних одержати функцію у вигляді таблиці, що утворюється з двох стовпців: х та f(x). У системі MathCAD такої вбудованої функції немає, але ця задача розв'язується іншими способами.

Перший спосіб ґрунтується на виконанні таких процедур:

1. Присвоєння змінній (наприклад x) значень аргументів табульованої функції. При цьому крок таблиці повинен бути постійним. Змінна x подається в такому вигдяді: x0, x0+h....xk, де x0 – початкове значення аргумента; h – крок таблиці; xk – кінцеве значення аргумента. Наприклад, x :0, 0.2..3. У такому представленні змінна x називається ранжованою змінною.

2. Введення табульованої функції, якій може бути присвоєне ім'я.

3. Одержання розв'язку шляхом натиснення клавіші «=». Якщо табульованій функції було присвоєне ім'я, наприклад f :=, то розв'язок одержують шляхом введення символу f та натисненням на клавішу «=» (дорівнює). Покажемо технологію табулювання на прикладі.

**Приклад 5.3**. Необхідно протабулювати функції:  $x e^x$ , sin x,  $\frac{x-1}{x+1}$  в діапазоні зміни аргумента від 0 до 2 з кроком 0.2.

Розв'язок має вигляд, зображений на рисунку 13.

:= 0,0.2	2		
зуль	тат виконанн	я операції	ранжува
-	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{x}} =$	sin(x) =	$\frac{x-1}{x-1} =$
0			x + 1
).2	0.244	0.199	-1
1.4	0.597	0.389	-0.667
1.6	1.093	0.565	-0.429
).8	1.78	0.717	-0.25
1	2.718	0.841	-0.111
.2	3.984	0.932	0
.4	5.677	0.985	0.091
.6	7.925	1	0.167
.8	10.889	0.974	0.231
2	14.778	0.909	0.286
			0.333

Рис. 13 – Розв'язок до прикладу 5.3

Другий спосіб використовується в тих випадках, коли крок таблиці змінний.

Технологія табулювання складається з виконання таких операцій:

1. Створюється вектор аргумента *х* табульованої функції. Вектор створюється в такій послідовності:

- введення символа *х* вектору аргументів;
- натиснення клавіші «:», на екрані з'явиться символ присвоєння;

- виклик діалогового вікна *Вставка Матрицы* для встановлення розмірів вектора аргументів шляхом натискання клавіші з зображенням матриці на панелі інструментів *Матрица*;

- встановлення розмірів матриці;

- введення числових аргументів табульованої функції.

2. Вводиться табульована функція з аргументом *x*.

3. Одержання розв'язку шляхом натиснення клавіші «=» (дорівнює). На екрані з'явиться відповідь у вигляді вектора значень табульованої функції.

Приклад було розглянуто вище.

Недоліками табуляції функцій є:

1. Неможливість табулювання одночасно декількох функцій.

2. Вектор розв'язку не містить аргументів, що ускладнює визначення значень функції при заданому значенні аргумента.

Для зручності визначення значень функцій при даних значеннях аргументів можна дублювати вектор аргументів та шляхом перетягування одержаних векторів розв'язків розташувати їх поруч.

#### Обчислення суми ряду чисел

Система MathCAD дозволяє додавати числа, що задані у вигляді вектора з постійним або змінним кроком. При цьому числа можуть бути задані у вигляді функцій.

Додавання здійснюється з використанням шаблону із панелі Исчисление. Користувач заповнює маркери введення, що відмічені чорними прямокутниками, та одержує відповідь шляхом натиснення клавіші «=» (дорівнює).

На практиці часто доводиться додавати числа, що задані у вигляді вектора, елементами якого можуть бути числа з постійним чи змінним кроком, а також подані у вигляді функцій.

У MathCAD є декілька технологій додавання чисел.

Якщо числа задані у вигляді вектора з постійним кроком, то вектор чисел подається у вигляді ранжованої змінної.

У цьому випадку технологія додавання складається з такиих операцій:

- створення вектора чисел з ім'ям ранжованої змінної;

- введення шаблону натисненням миші на кнопці панелі інструментів **Исчисление**;

- введення в обидва маркери введення імені вектора (ранжованої змінної);

- одержання суми чисел шляхом натиснення на клавішу «=».

*Приклад* 5.4. Необхідно визначити, на скільки сума парних чисел у діапазоні від 1 до 10 більше суми непарних чисел у цьому ж діапазоні.

#### Розв 'язання

У даному прикладі вектор парних чисел може бути поданий у вигляді x1:=2, 4..10 (2 – перший член ряду, 4 – другий, а 4-2=2 є крок ряду), а сума непарних чисел x2:1, 3..10. Різниця  $\sum x1 - \sum x2$  і буде розв'язком задачі.

Результати розв'язку задачі за допомогою MathCAD наведені на рисунку 14.





Якщо числа задані у вигляді вектора зі змінним кроком, то технологія додавання буде така:

- 1. Утворення вектора чисел.
- 2. Введення шаблону знаходження суми ряду.
- 3. Заповнення маркера введення символом імені вектора чисел.
- 4. Одержання розв'язку.

Розглянемо технологію на прикладі.

Приклад 5.5. Необхідно обчислити суми таких чисел:

- 1) 2; 7; 9; 11; 23; 27;
- 2) 1; sin(0.5); e<sup>0.5</sup>; ln(2); 12;
- 3)  $3 \cdot \ln(5)$ ;  $\sin(1) = \cos^{+}(1)$ ; 7; 2.0,75<sup>2</sup>; 18.

#### Розв'язання

Векторам чисел присвоюємо імена: x1, x2, x3.

Розв'язок цього прикладу в системі MathCAD зображений на рисунку 15. На панелі Матрица необхідно скористатися кнопкою Сумма векторов(CTRL+4).



Рис. 15 – Обчислення суми чисел з прикладу 5.5

MathCAD дозволяє обчислювати суму значень функції, що задана в аналітичному вигляді. В цьому випадку технологія складається з виконання таких операцій:

- 1. Виклик на екран панелі Исчисление та вибір відповідної суми для обчислення.
- 2. Введення в пусті маркери функції та діапазону значень аргумента сумування.
- 3. Натиснення кнопки символьних обчислень.
- 4. Одержання відповіді.

Розглянемо технологію додавання на прикладах.

Приклад 5.6. Необхідно знайти суми таких функцій:

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-x}; \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i} \cdot \frac{x^{i}}{i!}; \sum_{n=1}^{100} n; \sum_{n=1}^{100} n!; \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}; \sum_{n=1}^{n} n; \sum_{n=1}^{n} n^{2}; \sum_{n=1}^{n} n^{3};$$

Розв'язок задачі в системі MathCAD наведений на рисунку 16.

$$\sum_{n=1}^{100} n = 5.05 \times 10^3 \sum_{n=1}^{100} n! = 9.427 \times 10^{157} \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = 5.187$$

$$\sum_{n=1}^{n} n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (n+1)^2 - \frac{1}{2} \cdot n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n} n^2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot (n+1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (n+1)^2 + \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^3 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot (n+1)^4 - \frac{1}{2} \cdot (n+1)^3 + \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2$$

$$n1 := \infty$$

$$\sum_{n=0}^{n1} \exp(-n) \rightarrow \frac{1}{(\exp(1)-1)} \cdot \exp(1) = 1.582 \sum_{n=0}^{n1} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} \rightarrow \exp(-x)$$

Рис. 16 – Значення суми чисел для прикладу 5.6

#### Обчислення добутку ряду чисел

Добуток чисел у MathCAD, так само як і додавання, здійснюється завдяки шаблонам з панелі **Исчисление**. При цьому використовуються два види шаблонів — з двома та чотирма маркерами введення. Перший використовується для обчислення добутку двох чисел з сталим кроком, поданих у ранжованому вигляді.

Технологія обчислення в цьому випадку є такою:

- утворення вектора чисел зі стадим кроком типу ранжованої змінної: x : x0, x0+h ... xk;

- введення шаблону добутку натисненням комбінації клавіш Shift+3 або натисненням миші по кнопці добутку на панелі *Исчислений*;

- заповнення маркерів введення ім'ям ранжованої змінної;

- одержання відповіді.

При визначенні добутку чисел, що утворюють функцію при заданих значеннях аргументу, використовується шаблон добутку з чотирма маркерами.

У цьому випадку технологія буде така:

- введення відповідного шаблону;
- заповнення маркерів введення;
- одержання результату.

Технологію розглянемо на прикладі.

Приклад 5.7. Необхідно визначити добуток ряду таких чисел:

- *х* від 1 до 20 з кроком 0,2;
- 2.5; 2.5;  $e^3$ ;  $\ln(5)$ ; 3;  $\sin(0.5)$ ;
- *e<sup>x</sup>* при х від 0 до 5;
- x+ln(x)+ sin(x) при х від 1 до 100;
- $1 \frac{1}{(2 \cdot k + 1)^2}$  при к від 1 до  $\infty$ .
- *n*! при *n* від 1 до 10.

Розв'язок наведений на рисунку 17.



Рис. 17 – Обчислення добутку значень функції

#### Обчислення границь

Границі в MathCAD визначаються за допомогою функції lim. Шаблони викликаються клацанням мишки на кнопках панелі інструментів *Исчисления* чи за допомогою комбінації клавіш Ctrl+L, Ctrl+A, Ctrl+B.

Символ  $\infty$  (нескінченість) при визначені границь вводиться за допомогою комбінації клавіш Ctrl+Z чи клацанням мишею по кнопці  $\infty$  панелі інструментів *Исчисление*.

Технологія обчислення границь складається з таких кроків:

- введення знака lim;
- заповнення маркерів шаблону lim;
- одержання відповіді.

Технологію розглянемо за допомогою прикладу.

Приклад 5.8. Необхідно знайти границі значень таких функцій:

1.  $\lim_{x \to 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)$ ; 2.  $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1 - e^x}$ ; 3.  $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ ; 4.  $\lim_{x \to 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

Розв'язок зображений на рисунку 18.



Рис. 18 – Границі функцій для прикладу 5.8

#### Обчислення інтегралів

Операція інтегрування в інженерній діяльності на практиці зустрічається досить часто. При цьому доводиться обчислювати інтеграли невизначені, визначені, кратні та невласні.

Система MathCAD успішно виконує задачу інтегрування.

Розглянемо обчислення різних видів інтегралів.

Технологія обчислення невизначеного інтеграла виконується при виборі відповідного шаблону з панелі інструментів *Исчислений* або за допомогою команди меню *Символика→Переменная→Интегрировать*.

Визначення невизначеного інтеграла розглянемо на прикладі:

Приклад 5.9. Обчислити невизначені інтеграли.

При обчислені невизначеного інтеграла за допомогою шаблону необхідно вибрати шаблон  $\int$ , під знаком інтегралу в шаблоні набрати потрібний вираз, вказати зміну за якою буде здійснюватися операція інтегрування:  $\int F(x)dx$ . Для одержання відповіді необхідно з панелі *Символьная* вибрати знак «—» та поставити його після інтеграла і натиснути мишкою в будь-якому пустому місці документа:  $\int F(x)dx \to ($ рисунок 19).



Рис. 19 – Обчислення невизначеного інтеграла

Система MathCAD дозволяє обчислювати визначені інтеграли в аналітичному та числовому вигляді.

Технологія обчислень визначеного інтеграла:

– виведення на екран шаблону визначеного інтеграла за допомогою панелі *Исчисления*;

– введення в пусті маркери підінтегральної функції; 🗆 виконання команди обчислення інтеграла.

Обчислення можливе за допомогою трьох таких способів виклику команд обчислення інтегралів: клавіша «=» (дорівнює), комбінація клавіш Shift+F9 та виклику знаку символьних обчислень «→» шляхом натиснення комбінації клавіш Ctrl+«.».

Розглянемо на прикладі обчислення визначеного інтеграла

Приклад 5.10. Обчислити визначені інтеграли.

Розв'язок показаний на рисунку 20.

Розрахунок визначених інтегралів:  $\int_{0}^{10} x \cdot e^{-2 \cdot x} dx \rightarrow \frac{-21}{4} \cdot \exp(-20) + \frac{1}{4} = 0.25$ r :=  $\infty$   $\int_{0}^{r} e^{-x^{2}} dx = 0.886 \int_{0}^{r} e^{-x^{2}} dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.886$ 

Рис. 20 – Розрахунок визначених інтегралів

#### Контрольні питання

- 1. Які операції включають спеціальні обчислення в системі MathCad?
- 2. Які два способи існують для обчислення похідних в MathCad?
- 3. Які кроки треба виконати, щоб отримати похідну за допомогою пункту меню Символика?
- 4. Які кроки треба виконати, щоб отримати похідну за допомогою шаблону похідної?
- 5. Які функції називаються табульованими?
- 6. Як отримати табульовану функцію?
- 7. Яким чином здійснюється обчислення суми ряду чисел в системі MathCad?
- 8. Яким чином здійснюється обчислення добутку ряду чисел в системі MathCad?
- 9. Яким чином здійснюється обчислення границь в системі MathCad?
- 10.Яким чином здійснюється обчислення інтегралів в системі MathCad?

## § 6. Пошук екстремумів функцій (Для самостійного опрацювання)

## План

- 1. Екстремум функції однієї змінної.
- 2. Пошук локальних екстремумів в системі MathCAD.
- 3. Завданнях на умовний екстремум функції. Ключове слово Given.
- 4. Екстремум функції багатьох змінних.

## Екстремум функції однієї змінної.

Пошук екстремуму функції містить у собі завдання знаходження локального і глобального екстремуму. Ці задачі називають ще завданнями оптимізації. Розглянемо конкретно, наприклад, функцію f(x), яка показана графіком (на рисунку 21) на інтервалі (-4,2). Вона має глобальний максимум на правій границі інтервалу, локальний мінімум, локальний максимум, локальний мінімум і локальний максимум на лівій границі інтервалу (у порядку з права на ліво).

В MathCAD за допомогою вбудованих функцій вирішується тільки завдання пошуку локального екстремуму. Щоб знайти глобальний максимум (або мінімум), потрібно або спочатку обчислити всі їхні локальні значення й потім вибрати з них найбільше(найменше), або попередньо протабулювати із деяким кроком функцію в розглянутій області, щоб виділити з неї підобласть найбільших (найменших) значень функції й здійснити пошук глобального екстремуму, уже перебуваючи в його околі.





Для пошуку локальних екстремумів є дві вбудовані функції, які можуть застосовуватися як в межах обчислювального блоку, так і автономно.

– *Minimize(f, x1, ..., xm)* – виводить вектор значень аргументів, при яких функція *f* досягає мінімуму;

*Maximize(f, x1, ..., xm)* – виводить вектор значень аргументів, при яких функція *f* досягає максимуму.
 *f (x1, ..., xm,...)* – функція, *x1, ..., xm* - аргументи, по яких проводиться мінімізація (максимізація).

Всім аргументам функції f попередньо варто присвоїти деякі значення, причому для тих змінних, по яких проводиться мінімізація, вони будуть сприйматися як початкові наближення. Приклади обчислення екстремумів функції однієї змінної без додаткових умов показані на рисунку 22. Оскільки ніяких додаткових умов в них не вводиться, пошук екстремумів виконується для будь-яких значень.

$$\begin{split} f(x) &:= x^4 + 5 \cdot x^3 - 10 \cdot x \\ x &:= -1 \\ Minimize(f, x) &= -3.552 \\ Maximize(f, x) &= -0.944 \\ x &:= 1 \\ Minimize(f, x) &= 0.746 \\ maximize(f, x) &= -0.944 \end{split}$$

Рис. 22. Мінімум та максимум функції однієї змінної.

```
f(x) := x^{4} + 5 \cdot x^{3} - 10 \cdot x
x := 1
Given
-5 < x < -2
Minimize(f, x) = -3.552
x := 1
Given
x > 0
Minimize(f, x) = 0.746
```

Рис. 23 - Умовний екстремум функції.

У завданнях на умовний екстремум функції мінімізації і максимізації повинні бути включені в обчислювальний блок, тобто їм повинно передувати ключове слово **Given** (див. рисунок 23). У проміжку між **Given** і функцією пошуку екстремуму за допомогою бульових операторів записуються логічні

вирази (нерівності, рівняння), що визначають обмеження на значення аргументів мінімізуючої функції.

#### Екстремум функції багатьох змінних

Обчислення екстремуму функції багатьох змінних не несе принципових особливостей у порівнянні з функціями однієї змінної.

```
f_{x}(x,y) := 2 \cdot (x - 5.07)^{2} + (y - 10.03)^{2} - 0.2 \cdot (x - 5.07)^{3}
x := 3 \qquad y := 3
Given
0 < x < 15
0 < y < 20
Minimize(f, x, y) = \begin{pmatrix} 5.07 \\ 10.03 \end{pmatrix}
```

Рис. 24 – Знаходження мінімуму функції двох змінних

```
f(x, y) := \sin(x)^{2} + \cos(y)^{2} + \tan(x \cdot y)
x := 3 y := 3
Given
-15 < x < 15
-20 < y < 20
Minimize(f, x, y) = \begin{pmatrix} -0.709 \\ 2.217 \end{pmatrix}
Maximize(f, x, y) = \begin{pmatrix} 0.893 \\ 1.758 \end{pmatrix}
```

Рис. 25 – Екстремуми функції багатьох змінних

## Контрольні питання

- 1. Яке завдання містить у собі пошук екстремуму функції?
- 2. Як в системі MathCAD знайти глобальний максимум (або мінімум) функції?
- 3. Які вбудовані функції MathCAD застосовуються для пошуку локальних екстремумів?
- 4. Чим відрізняється завдання на умовний екстремум функції?
- 5. Яке ключове слово використовується в завданнях на умовний екстремум функції?

## § 7. Матричні та векторні операції в MathCAD

## План

1. Технологія створення вектора та матриць.

- 2. Операції над матрицями.
- 3. Матричні оператори.
- 4. Функції повернення характеристик матриці.
- 5. Матричні функції.
- 6. Операції над векторами.

#### Технологія створення вектора та матриць

Технологія створення векторів та матриць в MathCAD складається з виконання таких дій:

- 1. Введення імені вектора чи матриці та знака присвоєння.
- 2. Встановлення розмірів вектора чи матриці.
- 3. Введення елементів вектора чи матриці в пусті маркери.

Встановлення розмірів вектора чи матриці можна за допомогою комбінації клавіш Ctrl+M чи на панелі *Матрица* вибрати команду *Матрица или Вектор* та викликати вікно Вставка матрицы (рисунок 26).

У полі Rows задається необхідна кількість стовпців матриці чи вектора, а в полі Columns – необхідна кількість рядків. Після заповнення необхідно натиснути клавішу **О**к.



Рис. 26 – Введення розмірів матриці чи вектора

Елементами векторів та матриць можуть бути:

- дійсні та комплексні числа;
- функції з числовими значеннями аргументів;

- сукупність чисел, функцій, арифметичних операторів та їх обчислення.
- \_

## Операції над матрицями

Над матрицями в MathCAD можна виконувати такі дії:

- додавання до елементів матриці числа *M*+**z**;
- віднімання від елементів матриці числа: *М*-**z**;
- множення елементів матриці на число: *М* \***z** ;
- ділення елементів матриці на число: *М* / **z** ;
- додавання матриць: *M*1+*M*2;
- віднімання матриць: *M*1–*M*2;
- множення матриць:  $M1^*M2;$
- множення елементів матриць: *М*1<sup>*∗*</sup>*М*2;
- піднесення матриці до степеня:  $M1^n$ .

MathCAD має велику кількість вбудованих функцій та операторів, що дозволяють обчислювати характеристики матриці, виконувати різноманітні її перетворення, утворювати нові матриці, повертати елементи, рядки та стовпці матриць. Проілюструємо операції над матрицями на прикладі.

*Приклад* 7.1. Здійснити операції над матрицями M<sub>1</sub> та M<sub>2</sub>. Операції над матрицями проілюстровані на рисунку 27.

Робота	з матрицями.	-
$M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad M2 := \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
$M1 + 3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} M1 - 3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 $	$ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}  M1 \cdot 3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 9 & 3 & 6 \\ 12 & 15 & 9 \end{pmatrix} \frac{M1}{3} = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.667 & 1.66 \\ 1 & 0.333 & 0.667 & 1.66 \\ 1.333 & 1.667 & 1 \end{pmatrix} $	57 57
$M1 + M2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 6 \end{pmatrix}  M1 - 1$	$M2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M1 \cdot M2 = \begin{pmatrix} 28 & 30 & 23 \\ 17 & 20 & 20 \\ 35 & 32 & 35 \end{pmatrix} M1^{2} = \begin{pmatrix} 27 & 29 & 2 \\ 14 & 17 & 2 \\ 31 & 28 & 3 \end{pmatrix}$	4 3 9

<i>Puc.</i> 27 –	Операції і	над матрицямі
------------------	------------	---------------

#### Матричні оператори:

- 1. Зворотна матриця: *М*<sup>-1</sup>.
- 2. Обчислення визначника: |*M*/.
- 3. Транспонування матриці:  $M^T$ .
- 4. Векторизація матриці:  $\vec{M}$ .
- 5. Виділення n-го стовпця матриці:  $M^{n}$ .
- 6. Виділення елемента матриці: *М*<sub>*m,n*</sub>.
- 7. Виділення комплексно-спряженої матриці: М.

Проілюструємо операції над матрицями на прикладі.

*Приклад* **7.2.** Здійснити матричні операції над матрицями M<sub>1</sub> та M<sub>2</sub>. Матричні операції проілюстровані на рисунку 28.

$$\begin{array}{c} \textbf{Pobota 3 матрицями.} \\ i \coloneqq \sqrt{-1} \\ M1 \coloneqq \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right) & M2 \coloneqq \left(\begin{array}{cccc} 2 + 3 \cdot i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 - 4 \cdot i \\ 5 + i & 5 & 7 \end{array}\right) \\ M1^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 0.333 & -0.133 & 0.067 \\ -0.667 & -0.533 & 1.267 \\ 0.333 & 0.467 & -0.733 \end{array}\right) & |M1| = -15 & M1^{T} = \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{array}\right) \\ M1^{\langle 2 \rangle} = \left(\begin{array}{cccc} 2 \\ 7 \\ 4 \end{array}\right) & M2^{\langle 2 \rangle} = \left(\begin{array}{cccc} 3 \\ 1 - 4i \\ 7 \end{array}\right) & \overrightarrow{M1} = \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \\ M1_{(1,1)} = 4 \end{array}$$

Рис. 28 – Матричні операції

#### Функції повернення характеристик матриці:

1. Повернення числа стовпців матриці: cols(M).

- 2. Повернення числа рядків матриці: rows(M).
- 3. Повернення рангу матриці: rank(M).
- 4. Повернення суми діагональних елементів матриці: tr(M).
- 5. Повернення середнього значення масиву елементів: mean(M).

6. Повернення медіани масиву елементів: *median*(*M*).

Проілюструємо функції повернення характеристик матриці на прикладі.

*Приклад* **7.3.** Обчислити функції повернення характеристик матриці М. Функції повернення характеристик матриці проілюстровані на рисунку 29.

```
Функції повернення характеристик
матриці:
M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}cols(M) = 4 rows(M) = 4 rank(M) = 2mean(M) = 4 median(M) = 4 tr(M) = 12
```

Рис. 29 – Функції повернення характеристик матриці

#### Матричні функції:

1. Об'єднання двох матриць з однаковим числом рядків в одну: *augment(M1,M2)*.

2. Об'єднання двох матриць з однаковим числом стовпців в одну: stack(M1,M2).

3. Створення одиничної квадратної матриці  $(n \times n)$ : *identity*(n).

4. Повернення матриці дійсних чисел: Re(M).

5. Повернення матриці уявних чисел: Im(*M*). Розглянемо деякі приклади:

*Приклад* 7.4. Обчислити матричні функції. Матричні функції проілюстровані на рисунку 30.



Рис.30 – Приклад використання матричних функції

#### Операції над векторами

Введення вектора відбувається так само, як і введення матриці.

#### Розглянемо операції над векторами:

- 1. Транспонування вектора:  $V^T$ .
- 2. Сортування вектора: sort(V).
- 3. Зворотне сортування вектора: reverse(V).
- 4. Векторизація:  $\vec{V}$ .
- 5. Норма вектора: |V|.
- 6. Визначення числа елементів вектора: length(V).
- 7. Виділення n-го елемента: V<sub>n</sub>.
- 8. Повернення номера останнього елемента вектора: last(V).

9. Повернення елемента вектора, максимального за значенням: max(V).

10. Повернення елемента вектора, мінімального за значенням: min(V).

11. Повернення дійсної частини елемента вектора:  $\operatorname{Re}(V)$ . Повернення уявної частини елемента вектора:  $\operatorname{Im}(V)$ .

### Контрольні питання

- 1. З яких дій складається технологія створення векторів та матриць в MathCAD?
- 2. Яким чином встановлюються розміри вектора чи матриці?
- 3. Що може бути елементами векторів та матриць?
- 4. Які дії можна виконувати над матрицями в MathCAD?
- 5. Перелічіть матричні оператори.
- 6. Які існують функції повернення характеристик матриці?
- 7. Перелічіть матричні функції.
- 8. Перелічіть операції над векторами.

## § 8. Розв'язок математичних рівнянь у системі MathCAD

## План

- 1. Загальні положення.
- 2. Розв'язок рівнянь за допомогою функції root.
- 3. Визначення коренів полінома.
- 4. Розв'язку рівнянь у символьному вигляді.

## Загальні положення

Аналіз аналітичних та чисельних методів розв'язку алгебраїчних та трансцендентних рівнянь показує, що не існує єдиного алгоритму визначення коренів рівняння. Тільки їх сукупність дозволить знайти корені рівнянь і то не завжди.

Комп'ютерні технології розв'язку рівнянь вимагають чіткої постановки задачі. Недостатньо сформувати задачу так: необхідно визначити корені рівняння  $2^x - 3,8 \cdot x + 1 = 0$ . Таке формування задачі не коректне, оскільки не відомо, які корені нас цікавлять — дійсні чи комплексні, скільки коренів міститься в цьому рівнянні та які з них необхідно знайти, в якій області значень аргументів вони знаходяться, з якою точністю необхідно одержати розв'язок.

Правильною в даному випадку буде така постановка задачі: необхідно знайти дійсні корені рівняння  $2^x - 3.8 \cdot x + 1 = 0$ , що знаходяться в області ізоляції  $0.1 < x_1 < 1$  та  $3 < x_2 < 5$ . Розв'язок одержати з точністю не менше чотирьох значущих цифр після коми.

Комп'ютерні технології розв'язку алгебраїчних та трансценде́нтних рівнянь представляють собою виконання таких дій:

1. Визначення області ізоляції кожного з дійсних коренів рівняння.

2. Вибір вбудованої функції розв'язку рівняння.

3. Розв'язок рівняння.

4. Перевірка правильності одержаного розв'язку.

Система MathCAD має декілька вбудованих функцій для пошуку розв'язку рівнянь та систем рівнянь. Серед них є наступні три функції:

- root;
- find;
- polyroots.

#### Розв'язок рівнянь за допомогою функції root

Функція гоот здійснює розв'язок алгебраїчних та трансцендентних рівнянь, визначаючи дійсні корені рівняння. Вона має вигляд:

#### root(f(x),x),

де f(x) – рівняння, що розв'язується, тобто f(x)=0; x – аргумент функції f(x). Ця функція подається в одній із таких форм запису:

$x := x_0$	$x := x_0$	$x := x_0$
root(f(x),x) =	$\mathbf{z}$ :=root( $f(x)$ , $x$ )	$\phi(x)=f(x)$
	<b>z</b> =	$\mathbf{z} := root((x), x)$
		<b>z</b> =

Наведемо приклади використання функції root.

Приклад 8.1. Необхідно визначити корені рівняння

 $2^x - 4 \cdot x = 0$ , якщо відомо, що рівняння має два корені та такі області ізоляції:  $0 < x_1 < 1$ ,  $3 < x_2 < 5$ .

Розв'язок зображений на рисунку 31.

Розв'язок рівняння	Спосіб 2
Cnocis 1	x := 1
$\mathbf{x} := 1$	$f(x) \coloneqq 2^x - 4 \cdot x$
$\operatorname{root}(2^{x} - 4 \cdot x, x) = 0.31$	z := root(f(x), x)
x := 5	z = 0.31
(.x.)	x := 5
$\operatorname{root}(2^n - 4 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x}) = 4$	$f(x) \coloneqq 2^x - 4 \cdot x$
	z := root(f(x), x)
	z = 4

Рис. 31 – Розв'язок рівняння за допомогою функції root

Функція root використовується для визначення тільки дійсних коренів, а для визначення комплексних коренів вона не застосовується.

#### Визначення коренів полінома

Визначення коренів полінома здійснюється за допомогою функції polyroots, яка має вигляд:

**Polyroots(V),** V – вектор коефіцієнтів полінома, починаючи з молодшого степеня.

Ця функція знаходить всі дійсні та комплексні корені.

Технологія використання цієї функції така:

1. Введення вектора коефіцієнтів полінома за допомогою панелі Матрица.

2. Введення функції polyroots;

3. Одержання результату шляхом натискання на клавішу дорівнює.

Якщо який-небудь член у поліномі відсутній, то на відповідній позиції вектора повинен стояти нуль.

Розглянемо технологію визначення коренів полінома на прикладах.

Приклад 8.2. Нехай необхідно знайти корені поліномів:

1) 
$$x^4+3x^3-7x+3,5=0;$$

- 2)  $X^{5}-1=0;$
- 3)  $X^5+2\cdot i\cdot x^4 + (1-3\cdot i)\cdot x^2 1 = 0.$

Розв'язок буде мати вигляд, зображений на рисунку 32.

Po	зв'язок рівняння 1	Розв'язок рівнян	іня 2
♥1 :=	$ \begin{array}{c} 3.5 \\ -7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right) \text{ polyroots}(\forall 1) = \left( \begin{array}{c} -2 \\ -2 \end{array} \right) $	$ \begin{array}{c} 237 - 1.089i \\ 2257 + 1.089i \\ 0.629 \\ 0.886 \end{array} \right) \forall 2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ $	-0.809 - 0.588i -0.809 + 0.588i 0.309 - 0.951i 0.309 + 0.951i
	і≔ √-1 Розв'язок рівняння З	+ (1)	
₩3 :=	$ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 - 3 \cdot i \\ 0 \\ 2 \cdot i \\ 1 \end{bmatrix} $ polyroots(7)	$(V3) = \begin{pmatrix} -1.13 + 0.218i \\ -0.431 - 0.371i \\ 0.133 - 2.499i \\ 0.433 + 0.411i \\ 0.994 + 0.241i \end{pmatrix}$	

Рис. 32 – Розв'язок рівнянь до прикладу 8.2

## Визначення коренів рівняння за допомогою функції Find

Функція **Find** призначена для розв'язку систем рівнянь методом ітерацій. Як частковий випадок функція може розв'язувати систему з одного рівняння, тобто визначати його корені.

У цьому випадку блок розв'язку рівняння поєднує такі процедури:

- завдання початкового наближення кореня з області його ізоляції;
- введення слова Given, яке вказує на те, що далі йде рівняння, корені якого необхідно визначити;
- введення рівняння, знак рівності необхідно набрати за допомогою комбінації клавіш «Ctrl»+«=»;
- введення функції Find(x), де x шукана змінна; одержання відповіді шляхом натиснення на клавішу «=».

Технологію розв'язку розглянемо на прикладах:

**Приклад 8.3**. Необхідно розв'язати рівняння  $3^x - 8 \cdot x + 1 = 0$ , якщо відомо, що рівняння має два корені, область ізоляції яких має значення:  $0 < x_1 < 1, 2 < x_2 < 3$ .

Розв'язок рівняння наведений на рисунку 33.

Розв'язок рівняння для x1	Розв'язок рівняння для x2
x := 0.5	x := 3
Given	Given +
$3^{\mathbf{X}} - 8 \cdot \mathbf{x} + 1 = 0$	$3^{x} - 8 \cdot x + 1 = 0$
z := find(x)	z := Find(x)
z = 0.299	z = 2.782
Розв'язок рівняння для x1	Розв'язок рівняння для х2
x := 0.5	x := 3
Given	Given
$3^{x} - 8 \cdot x + 1 = 0$	$3^{x} - 8 \cdot x + 1 = 0$
find(x) = 0.299	Find(x) = 2.782

Рис. 33 – Розв'язок рівняння за допомогою функції Find

Технологія розв'язку рівнянь у символьному вигляді складається з таких операцій:

1. Введення рівняння f(x)=0, при цьому =0 можна опустити.

2. Виділення шуканої невідомої подвійним клацанням мишки.

3. Звертання до пункту головного меню Символика→Переменные→Разрешить.

4. Одержання відповіді.

Розглянемо приклади.

Приклад 8.4. Необхідно розв'язати символьні рівняння:

1)  $x^{3}-a=0$ , 2)  $e^{-2x}-2 \cdot a=0$ , 3)  $\sin(a \cdot x) + \cos(a \cdot x) = 0$ .

Розв'язок рівнянь, зображений на рисунку 34.

Розв'язок рівняння: Приклад 1: x <sup>3</sup> – a = 0	Приклад 2: e <sup>-2:x</sup> -2·a=0
$\begin{bmatrix} a^{\left(\frac{1}{3}\right)} \\ \frac{-1}{2} \cdot a^{\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot a^{\left(\frac{1}{3}\right)} \end{bmatrix}$	 
$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{-1}{2} \cdot \mathbf{a}^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{i} \cdot \sqrt{3} \cdot \mathbf{a}^{\left(\frac{1}{3}\right)} \end{bmatrix}$	$\sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + \cos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = 0$ $\frac{-1}{4} \cdot \frac{\pi}{\mathbf{a}}$

Рис. 34 – Розв'язок символьних рівнянь для прикладу 8.4

При розв'язку рівнянь аналітичним методом MathCAD видає не повну інформацію про всі корені рівняння, так як і в прикладах 2 та 3 з рисунку 34.

Отже необхідно перевіряти правильність одержаних результатів.

Перевірка правильності одержаних результатів здійснюється таким чином:

1. Підстановка кореня в рівняння та обчислення значень рівняння, які повинні дорівнювати нулю при всіх значеннях кореня.

2. Обчислення коренів декількома методами.

## Контрольні питання

- 1. Чи існує єдиний алгоритм визначення коренів рівняння?
- 2. З яких дій складається технологія розв'язку алгебраїчних та трансценде́нтних рівнянь в системі MathCAD?
- 3. Які вбудовані функції має система MathCAD для пошуку розв'язку рівнянь та систем рівнянь?
- 4. Чи можна за допомогою функції root визначити комплексні корені рівняння?
- 5. За допомогою якої функції можна визначити корені полінома в системі MathCAD?
- 6. Навести технологію використання функції Polyroots.
- 7. Для чого призначена функція Find в системі MathCAD?
- 8. Які кроки потрібно виконати, щоб розв'язати систему рівнянь в MathCAD за допомогою функції **Find**?
- 9. Наведіть технологію розв'язку рівнянь у символьному вигляді?
- 10.Як проводиться перевірка правильності одержаних результатів при знаходженні коренів рівняння в системі MathCAD?

## § 9. Розв'язання систем рівнянь у системі MathCAD

## План.

- 1. Загальні положення.
- 2. Функція lsolve.
- 3. Функція Find.
- 4. Функція Minerr.

#### Загальні положення

У системі MathCad системи рівнянь розв'язуються за допомогою функцій:

- lsolve;
- Find;
- Minerr.

*Функція lsolve* дозволяє розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь матричним методом.

**Функція Find** дозволяє розв'язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь методом ітерацій.

**Функція Minerr** так само, як і функція Find розв'язує лінійні та нелінійні алгебраїчні рівняння. Відмінність полягає в тому, що функція може видати розв'язок, не досягнувши потрібної точності ітерацій. Це дозволяє одержати наближений розв'язок у випадку, коли функція Find не видає розв'язок. Але слід пам'ятати, що при використанні функції Minerr необхідно перевіряти правильність одержаних результатів.

Функції lsolve та Find дозволяють одержати розв'язок символьним методом.

#### Функція lsolve

Функція lsolve має вигляд: lsolve(M,V), де M – матриця коефіцієнтів системи лінійних рівнянь; V – вектор правих частин системи рівнянь.

Технологія розв'язку системи рівнянь така:

- позначення матриці коефіцієнтів системи лінійних рівнянь;
- утворення вектора правих частин системи рівнянь;
- введення функції lsolve;
- одержання розв'язку шляхом натиснення на клавішу дорівнює.

Розв'язок матричним методом можна одержати, не використовуючи функцію lsolve. Для цього досить ввести вираз  $M^{-1} \cdot V$ .

Розв'язок системи рівнянь завдяки функції lsolve та за допомогою матричного представлення можна одержати, використовуючи символьні обчислення. Для цього служить знак «—», що утворюється натисканням комбінації клавіш «Ctrl»+«.».

Розв'язок одержуємо при натисканні клавіші Enter. Технологію метода розглянемо на прикладах.

Приклад 9.1. Нехай необхідно розв'язати таку систему рівнянь:

 $\begin{cases} 2 \cdot x - 3 \cdot y + z = 1,5 \\ -x + 1,5 \cdot y + 3 \cdot z = -3 \\ 7 \cdot x + 5 \cdot y - 1,6 \cdot z = 7 \end{cases}$ 

Розв'язок рівняння зображений на рисунку 35.



*Рис.35 – Розв'язок системи рівнянь за допомогою функції lsolve для прикладу 9.1* 

#### Приклад 9.2.

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1\\ b \cdot x + y + 3 \cdot z = 2\\ c \cdot x + 5 \cdot y + z = 3 \end{cases}$$

Розв'язок наведений на рисунку 35.

Розв'язок системи рівняння:  

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ b & 1 & 3 \\ c & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Isolve(M, V)  $\rightarrow \begin{bmatrix} 7 \cdot \frac{(-1+a)}{(-14-b+3 \cdot c+5 \cdot b \cdot a-c \cdot a)} \\ \frac{(-b+3 \cdot b \cdot a-7-2 \cdot c \cdot a+3 \cdot c)}{(-14-b+3 \cdot c+5 \cdot b \cdot a-c \cdot a)} \\ \frac{(-7+2 \cdot b+c)}{(-14-b+3 \cdot c+5 \cdot b \cdot a-c \cdot a)} \end{bmatrix}$ 

Рис. 35 – Розв'язок системи рівнянь для прикладу 9.2

#### Функція Find

Функція Find дозволяє розв'язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь методом ітерацій.

Вона має вигляд: *Find*(x, y, z,...), де x, y, z – шукані невідомі.

Технологія розв'язку систем рівнянь є такою:

- завдання початкових наближень для всіх невідомих: x := x0, y := y0, z := z0, ...;
- введення слова Given, яке вказує на те, що далі буде система рівнянь;
- введення системи рівнянь;

- введення функції Find(x, y, z,...);
- одержання результату.
- Технологію методу розглянемо на прикладах.

**Приклад 9.3** Необхідно розв'язати систему з прикладу 9.1, якщо початкові наближення наступні:  $x_0=1$ ,  $y_0=0$ ,  $z_0=-0,5$ .

Розв'язок наведений на рисунку 36.

```
Розв'язок системи рівняння:

x = 1 y = 0 z = -0.5

Given

2 \cdot x - 3 \cdot y + z = 1.5

-x + 1.5 \cdot y + 3 \cdot z = -3

7 \cdot x + 5 \cdot y - 1.6 \cdot z = 7

Find(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0.924 \\ -0.099 \\ -0.643 \end{pmatrix}
```

Рис. 36 – Розв'язок для прикладу 9.3

Приклад 9.4. Розв'язати систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = -19 \\ x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 = 63 \\ \frac{x}{2 \cdot y} + \frac{y}{2 \cdot x} = \frac{13}{12} \end{cases}$$

Відомо, що початковими наближеннями можуть бути:

 $x_0 = -2; y_0 = -1,5; z_0 = 3.$ 

Розв'язок наведений на рисунку 37.

```
Розв'язок нелінійної
системи рівняння:
x = -2 y = -1.5 z = 3
Given
x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = -19
x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 = 63
\frac{x}{2 \cdot y} + \frac{y}{2 \cdot x} = \frac{13}{12}
Find(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}
```

*Puc. 37* 

### Функція Minerr

Функція Міпетт має таку саму технологію застосування для розв'язку, як і функція Find і має таку форму запису:

Minerr(x, y, z,...), де x, y, z – шукані невідомі.

Технологію застосування цієї функції розглянемо на прикладі.

*Приклад* 8.5 Для рівняння з прикладу 9.4 знайти розв'язок з використанням функції Minerr.

Розв'язок проілюстрований на рисунку 38.

```
Розв'язок нелінійної
системи рівняння:
x := -2 y := -1.5 z := 3
Given
x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = -19
x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 = 63
\frac{x}{2 \cdot y} + \frac{y}{2 \cdot x} = \frac{13}{12}
Minem(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}
```

*Puc* .38

#### Контрольні питання

- 1. За допомогою яких функцій у системі MathCad розв'язуються системи рівнянь?
- 2. Яким методом дозволяє розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь функція lsolve?
- 3. Яким методом дозволяє розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь функція *Find*?
- 4. В чому полягає відмінність функції Minerr від функції Find?
- 5. Який вигляд має функція lsolve?
- 6. Наведіть технологію застосування функції lsolve?
- 7. Який вигляд має функція Find?
- 8. Наведіть технологію застосування функції Find?
- 9. Яку форму запису має функція Minerr?
- 10.Наведіть технологію застосування функції Міпегг.

## § 10. Створення графіків у програмі Mathcad

#### План

1. Застосування графіків.

- 2. Склад *Панели графиков* у MathCAD.
- 3. Двомірна графіка у MathCAD. Побудова графіка в Декартовій системі.
- 4. Форматування графіків.
- 5. Побудова плоского графіка в полярній системі координат.
- 6. Операції над графіками.

7. Побудова діаграм. Точкова і стовпчаста діаграми.

#### Застосування графіків

Застосування графіків – це візуалізація демонстрації результатів, можливе виявлення їх відношення з навколишніми даними та проведення наступного більш детального аналізу.

Відомі три способи представлення функцій: у вигляді формули, таблиці та графіки.

У практичних задачах часто виникає необхідність візуалізації функцій у таких ситуаціях:

1. Загальний огляд точок графічної залежності. MathCad має властивість відображати графіки функцій за допомогою технології швидкої побудови, що важливе для експрес-аналізу результатів.

2. Дослідження графіка: точки перетину функції з віссю абсцис дають інформацію про корені відповідного рівняння. Допоміжні засоби тросування дозволяють без розрахунків зчитувати числові результати.

3. Аналіз вхідних табличних даних: невелика кількість опорних точок графіка при цьому з'єднуються послідовно лінійними відрізками.

4. Знаходження за табличними даними необхідної формули. Використання формули в практиці обробки даних характеризується відновленням великої кількості проміжних точок з побудовою відповідного апроксимуючого графіка.

5. Оцінка степені наближення та встановлення діапазону припустимої заміни однієї складно обчислювальної функції на іншу більш просту.

6. З графіка при проведенні додаткових міркувань можна одержати якісну та кількісну оцінку похибки обчислень за відомими похибками аргументів.

## Склад Панели Графиков

Побудова графіка у вибраній позиції документа починається з вибору за допомогою меню *Вставить*→*График* чи за допомогою панелі інструментів *Графики* (рисунок 39).



Рис. 39 – Панель Графики

Призначення кнопок панелі інструментів Графики подані в таблиці 2.

Таблиця 2 – Призначення	панелі інструментів	Графики
-------------------------	---------------------	---------

Кнопка	Назва	Виконувана дія
K	График	Використовується для побудови двомірних графіків
Ø	Масштаб	Використовують для збільшення або зменшення масштабів
¥	Слежение	Використовується для пошуку координат графіків
	Полярный график	Використовується для побудови полярних графіків
	Поверхностный график	Використовується для побудови поверхневих графіків
	Контурный график	Використовується для побудови контурних графіків
th	Трехмерный график преграды	Використовується для побудови графіка у вигляді діаграми
莽	Трехмерный график разноса	Використовується для побудови трьохмірного графіка у вигляді рознесення
<b>K R R</b>	Векторный график	Використовується для побудови трьохмірного графіка

## Двомірна графіка в MathCad

## Побудова графіка в Декартовій системі

При ініціалізації цієї піктограми на екрані з'являється заготовка графіка у вигляді прямокутника з полем графіка (рисунок 40).

У виділеному нижньому затушованому квадратику заготовки графіка необхідно помістити значення аргументу (наприклад, х), а у лівому затушованому квадратику – функцію, яка повинна бути зображена.



Рис. 40 – Заготовка графіка

Функція може бути задана аналітичним виразом, наприклад:

sin(x) + 2 cos(x)або в такому вигляді: f(x) чи df(x)/dx.

При цьому загальний+вигляд функції конкретизується перед графіком, наприклад: f(x):= sin(x)+ 2. cos(x). Приклади побудови графіків функцій та їх похідних наведено на рисунку 41.

Засоби математичного пакета дозволяють задавати область зміни аргумента *x*. Також визначаються верхня та нижня межа значень графіка. Побудова графіка здійснюється автоматично. При наявності розривів функції побудова графіків здійснюється як звичайно, а точки розриву з'єднуються умовними лініями.



Рис. 41 – Побудова графіків функцій та їх похідних

Для побудови двох графіків на одній шкалі необхідно після зазначення першого графіка у лівому затушованому квадратику поставити кому і тоді курсор опуститься на рядок нижче, де можна буде задати функцію для другого графіка. Таким чином, можна побудувати більше ніж два графіки. Але треба пам'ятати, що при побудові декількох графіків на одній шкалі всі вони повинні залежати від однієї змінної, що відкладається нижньому затушованому квадратику.

### Форматування графіків

Форматування графіка здійснюється за допомогою подвійного клацання мишкою по побудованому графіку і з'явиться вікно форматування графіка (рисунок 42).

Вкладка Оси X-Y з вікна Форматирование выбранного графика(Formatting) (рисунок 42) призначена для налаштування вигляду шкали. Налаштовувати можна обидві осі графіків, відповідно обравши одне з налаштувань: Ось X або Ось Y.

^-1   pad	Графики Формат чисел Подписи Умолчания					
Bernouwer		in nor V				
	вторичну		Перв	ичная ось Ү	Вторичная 4	
Ось Х						
Логариф	рмическая	шкала		Іогарифмиче	ская шкала	
Линии с	етки		Плинии сетки			
✓ Нумеров	занная		Нумерованная			
Автомасштабирование Автомасштабирование			ирование			
Показать маркеры				Показать маркеры		
✓ Автосетка			A	Матосетка		
Числа линий сетки: 2			Числ	Число линий сетки: 2		
Пиль осел			авные изо	штабы		
	ающиеся					
<u> </u>						

Рисунок 42 – Вікно форматування сітки

Вкладка **Графики** (рисунок 43) призначена для налаштування вигляду графіка.

Поле Метка легенды призначене для вибору графіка. Поле Symbol служить для відображення символів маркерів графіка.

Поле Линия служить для вибору символів відображення ліній графіка (суцільна, точкова, штрихова, штрих-пунктирна). Поле Цвет призначене для

вибору кольору відображення графіка лінії. Поле **Линия–Вес** служить для вибору товщини відображення графіка.

зи х-ү трафики с	Рариат чиск	ел Подп	иси Умол	чания		
Метка легенды	Символ Частота	Symbol	Символ Вес	Линия	Линия Вес	Цве
трассировка 1	1		1		1	
трассировка 2	1		1		1	
трассировка 3	1		1		1	
трассировка 4	1		1		1	
трассировка 5	1		1		1	
трассировка 6	1		1		1	
трассировка 7	1		1		1	5
€						>
<u>Скрыть парамет</u>	ры	Скр	ыть леген	μy		
	🔿 Сверху-слева 💦 Сверху-справ		права			
		О Снизу-слева О Снизу-справа		рава		
		Опизу				

Рис. 43 – Вікно налаштування вигляду графіка

Вкладка **Подписи** (рисунок 42) призначена для завдання заголовку графіка та його осей.

## Побудова плоского графіка в полярній системі координат

Система MathCAD дозволяє будувати графіки в полярній системі координат. Для цього служить кнопка *Полярный график* з панелі *Графики*.

При ініціалізації цієї кнопки піктограми на екрані виводиться заготовка графіка у вигляді прямокутника з колом, на якому знаходяться два затушованих прямокутники: один – внизу, другий – зліва від кола.

Приклад побудови графіка функції в полярній системі координат зображений на рисунку 44.



Рис. 44 – Побудова графіка в полярній системі координат

## Операції над графіками

Ділянки плоских графіків можуть бути збільшені до потрібного розміру. Для цього служить кнопка *Масштаб* з панелі інструментів *Графики*. Ініціалізація цієї кнопки здійснюється після виділення на графіку деякої ділянки (виділена ділянка показана пунктиром, рисунок 45).

X-Y Zoom	0.004
X         Y           Min:         2.89855         -0.001625           Max:         8.98551         0.0008125           Zoom         Unzoom         Full View           OK         Cancel	$\begin{array}{c} 2.027 \times 10^{-1} \\ 0.0024 \\ 8 \cdot 10^{-4} \\ \frac{g(x)}{-2.028 \times 10^{-3}} \\ -0.0024 \\ 0 \\ -10 \\ $
X-Y Zoom X Min: Max: Zoom Unzoom Full View OK Cancel	$\begin{array}{c} - & - & - & - & - & - & - & - & - & - $
	2.899 x 8.986

Рис. 45 – Операція масштабування графіків

Для визначення координат точок графіка (трасування) служить кнопка *Слежение* з панелі інструментів *Графики*.

Визначення координат називається трасуванням (визначенням точок) кривої. При ініціалізації кнопки *Слежение* на екрані виводиться меню, зображене на рисунку 46.

Трасування графіка здійснюється двома лініями, координати перетину яких показуються у вікні X – Y Trace. Ці координати можна скопіювати Сору X, Сору Y в буфер обміну, а потім перенести в потрібне місце MathCADдокумента.

Шляхом трасування можна визначити максимум (мінімум) кривої.



Рис. 46 – Трасування кривої графіка

Для побудови поверхні в панелі графіків є кнопка *Поверхностный график* з панелі *Графики*.

#### Побудова діаграм. Точкова діаграма

Графічне зображення матриці (рисунок 47) можна подати у вигляді точкової діаграми. Координати точок відповідають значенням матриці у вузлах сітки.

Засоби математичного пакета дозволяють в широкому діапазоні змінювати вигляд і формат графіка – здійснювати нахил графіка, поворот його на необхідний кут, нумерувати осі, задавати вигляд сітки та інше.

На полі графіка вказуються необхідні параметри координат, зображуються координатні осі, координатні площини та граничні лінії, змінюються координати вузлів сітки та відповідна їм кількість ліній на графіку поверхні.



Рис. 47 – Об'ємна точкова діаграма

## Стовпчаста діаграма

Елементи вектора чи матриці також можна зобразити у вигляді стовпчастої діаграми. Для цього на панелі *Графики* є кнопка *Трьохмерный график диаграммы*.

Висота стовпчиків діаграми відповідає значенню вектора чи матриці у вузлі сітки. Зображення матриці чи вектора у вигляді стовпчастої діаграми подається в аксонометрії (рисунок 48).

Для побудови графіка у вигляді стовпчастої діаграми задається раніше вказана додаткова інформація про сітку, на якій визначена функція двох змінних або значення матриці. Стовпчаста діаграма дає зручну візуальну інтерпретацію функції двох змінних або елементів вектора чи матриці.



Рис. 48 – Стовпчаста діаграма

## Контрольні питання

- 1. Які можливості надає застосування графіків?
- 2. Які відомі способи представлення функцій?
- 3. У яких ситуаціях в практичних задачах виникає необхідність візуалізації функцій?
- 4. За допомогою якої команди починають будувати графік в системі MathCAD?
- 5. Як побудувати двовимірний графік в системі MathCAD?
- 6. Як побудови два графіка на одній шкалі?
- 7. Як викликати вікно форматування графіка?
- 8. Які види графіків дозволяє побудувати система MathCAD?
- 9. Які операції над графіками можна виконувати системі MathCAD?
- 10.Для чого служить кнопка Слежение з панелі інструментів Графики?
- 11.Графічне зображення яких об'єктів в системі MathCAD можна представити у вигляді точкової діаграми?
- 12.За допомогою якої команди можна зобразити у вигляді стовпчастої діаграми елементи вектора чи матриці в системі MathCAD?

#### Література

- Інформатика: конспект лекцій у чотирьох частинах. Частина 4: Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010 – 123 с.
- 2. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 14. СПб.: Питер, 2007. 592с.
- 3. Половко А. М., Ганичев И. В. Mathcad для студента. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 336с.
- 4. Кудрявцев Е.М. MathCAD 2000 Pro. М.: ДМК "Пресс", 2001.